ECOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ADMISSION 1986

OPTION M'

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)

♦

L'objet du problème est d'étudier les solutions réelles maximales de l'équation différentielle

$$\text{E} \qquad xy'' + 2y' + \frac{x}{y} = 0$$

où x est une variable réelle. Toutes les solutions de E considérées sont à valeurs réelles.

Si l'on excepte la question III.6, *les parties* I, II *et* III *sont indépendantes les unes des autres.*

I

1. Comment une solution de E dont le graphe est inclus dans le demi-plan défini par l'inégalité $x < 0$ peut-elle se déduire d'une solution dont le graphe est inclus dans le demi-plan défini par $x > 0$?

2. Soient λ un réel non nul fixé et φ une solution maximale de E définie sur un intervalle auquel 1 appartient. Comment déduit-on de φ la solution maximale φ_λ telle que $\varphi_\lambda(\lambda) = \lambda\,\varphi(1)$ et $\varphi'_\lambda(\lambda) = \varphi'(1)$?

3. Comment les solutions de E dont les graphes sont inclus dans l'un des quarts de plan respectivement définis par les couples d'inégalités $(x < 0, y > 0)$, $(x < 0, y < 0)$ et $(x > 0, y < 0)$ peuvent-elles se déduire de solutions dont le graphe est inclus dans le quart de plan défini par $x > 0, y > 0$?

II

Soit S l'ensemble des solutions de E dont le graphe est inclus dans le quart de plan défini par les inégalités $x > 0$ et $y > 0$, et qui, de plus, sont des solutions *maximales pour ce quart de plan.*

1. Soit $\varphi \in S$, définie sur un intervalle *ouvert* $I =]a,b[\subset]0, +\infty[$.

a. En tout point $x \in I$, exprimer à l'aide de $\varphi(x)$ la valeur de la dérivée $(x^2\,\varphi'(x))'$ et trouver son signe.

b. La fonction φ présente-t-elle un minimum sur I ?

c. Montrer que φ est monotone sur I ou sur un sous-intervalle $[\,a', b\,[$ de même extrémité droite que I.

2. Soient φ_1 et φ_2 deux solutions appartenant à S, distinctes l'une de l'autre, et toutes deux définies au moins sur un intervalle $]\alpha, \beta[\subset]0, +\infty[$. On suppose qu'il existe un point $x_0 \in]\alpha, \beta[$ tel que $\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0)$.

a. Justifier l'inégalité $\varphi'_1(x_0) \neq \varphi'_2(x_0)$.

b. On choisit par exemple $\varphi'_1(x_0) < \varphi'_2(x_0)$ et on fait l'hypothèse de travail

H_1 : il existe au moins un réel $\xi \in]x_0, \beta[$ tel que $\varphi_1(\xi) = \varphi_2(\xi)$.

En notant x_1 la borne inférieure des réels ξ qui vérifient H_1, exprimer pour tout $x \in [\,x_0, x_1\,]$ la différence

$$x^2\,\varphi'_2(x) - x^2\,\varphi'_1(x)$$

à l'aide de $x_0^2\,[\,\varphi'_2(x_0) - \varphi'_1(x_0)\,]$ et d'une intégrale où interviennent φ_1 et φ_2. En déduire une comparaison entre $\varphi'_1(x)$ et $\varphi'_2(x)$ puis entre $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$. L'hypothèse H_1 est-elle acceptable ?

3. Pour élucider l'allure lorsque x croît des graphes des solutions appartenant à S, on fait l'hypothèse de travail

H_2 : il existe une solution φ appartenant à S et définie sur $]a, +\infty[$, avec $a \geqslant 0$

et on note γ un point de $]a, +\infty[$.

a. Comparer $x^2\,\varphi'(x)$ et $\gamma^2\,\varphi'(\gamma)$ pour tout $x \geqslant \gamma$ et en déduire que φ est bornée sur $[\,\gamma, +\infty[$.

b. Lorsque x tend vers $+\infty$, étudier le comportement de $x^2\,\varphi'(x)$ et en déduire que φ' tend vers $-\infty$.

c. L'hypothèse H_2 est-elle acceptable ?

4. Soit φ une solution appartenant à S.

a. Déduire de ce qui précède que son intervalle de définition $]a,b[$ est borné. Quelle est la limite de φ quand x tend vers b ?

b. En supposant que φ' a une limite finie ℓ quand x tend vers b, majorer φ au voisinage de b et en déduire pour $x^2\,\varphi'(x)$ une majoration incompatible avec la convergence de φ' vers ℓ. Quelle est la limite de φ' quand x tend vers b ?

Tournez la page S. V. P.

5. Dans cette question et la suivante, on suppose qu'il existe une solution $\psi \in S$ définie sur un intervalle $]\,0, d\,[$, ayant une limite finie non nulle en 0, et dont le prolongement continu à $[\,0, d\,[$, encore noté ψ, est de classe C^2 sur un intervalle *fermé* $[\,0, c\,]$ avec $0 < c < d$.

a. Quelle est la valeur de $\psi'(0)$? Quel est le signe de $\psi'(c)$?

b. Soit $\psi_1 \in S$, définie sur $]\,a_1, b_1\,[$ avec $a_1 < c < b_1$ et telle que $\psi_1(c) = \psi(c)$ et $\psi'_1(c) < \psi'(c)$. Vérifier que $a_1 = 0$. Quand x tend vers 0, déterminer le signe de la limite de $x^2\,\psi'_1(x) - x^2\,\psi'(x)$ et en déduire la limite de ψ'_1, puis l'existence d'un minorant strictement positif pour $x\,\psi_1(x)$. Quelle est la limite de ψ_1 quand x tend vers 0 ?

c. Déterminer le signe de $(x\,\psi_1(x))''$ et établir l'existence dans $\mathbb{R}$ d'un majorant indépendant de $x \in]\,0, b_1\,[$ pour $x\,\psi_1(x)$. Le produit $x\,\psi_1(x)$ a-t-il une limite finie non nulle lorsque x tend vers 0 ?

d. Soit $\psi_2 \in S$, définie sur $]\,a_2, b_2\,[$ avec $a_2 < c < b_2$ et telle que $\psi_2(c) = \psi(c)$ et $\psi'_2(c) > \psi'(c)$. Quel est le signe de $x^2\,\psi'_2(x) - x^2\,\psi'(x)$ sur $]\,a_2, c\,]$?Minorer $x^2\,\psi'_2(x)$ au voisinage de a_2 et en déduire que a_2 ne peut être nul. Quelles sont les limites de ψ_2 et de ψ'_2 quand x tend vers a_2 ?

6. En supposant les hypothèses de la question II.5 satisfaites pour $c = 1$, dessiner sur un même schéma les graphes des différentes sortes de solutions appartenant à S et passant par le point $(1, \psi(1))$.

III

L'objet principal de cette partie est d'établir l'existence et un procédé de calcul d'une solution ψ de E de classe C^2 sur l'intervalle *fermé* $[\,0, 1\,]$ et ayant au point 1 une valeur $\psi(1) = \eta > 0$ fixée arbitrairement. Dans ces conditions, $\psi'(0) = 0$.

1.a. Pour tout $x \in [\,0,1\,]$, exprimer à l'aide d'intégrales contenant chacune la fonction ψ les valeurs de

$$x^2\,\psi'(x) - \psi'(1)\,, \qquad x\,\psi'(x) + \psi(x) - \psi'(1) - \eta\,, \qquad \psi'(1)\,.$$

b. A toute fonction réelle f définie et continue sur $[\,0,1\,]$ on associe la fonction $T(f)$ définie sur $[\,0,1\,]$ par

$$T(f)(0) = \int_0^1 (t - t^2)\,f(t)\,dt$$

et, si $x \in]\,0,1\,]$,

$$T(f)(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right)\int_0^x t^2 f(t)\,dt + \int_x^1 (t - t^2)\,f(t)\,dt\,.$$

Vérifier l'égalité $\psi = \eta + T\left(\frac{1}{\psi}\right)$.

2.a. Calculer les dérivées $T(f)'(x)$ et $T(f)''(x)$. Combien valent-elles pour $x = 0$? Vérifier que $T(f)$ est de classe C^2 sur l'intervalle fermé $[\,0, 1\,]$.

b. Montrer que si f est positive ou nulle sur $[\,0,1\,]$, $T(f)$ est strictement positive sur $[\,0,1\,[$, sauf pour un choix particulier de f qu'on précisera. Quelle est la valeur de $T(f)(1)$?

c. Vérifier la linéarité de l'application T ainsi définie de l'ensemble $\mathcal{C}$ des fonctions réelles continues sur $[\,0,1\,]$ dans l'ensemble $\mathcal{F}$ des fonctions réelles de classe C^2 sur $[\,0,1\,]$ et montrer qu'en posant $\|f\| = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)|$ pour toute $f \in \mathcal{C}$, on a $\|T(f)\| \leqslant \frac{1}{6}\|f\|$.

3. On définit par récurrence une suite de fonctions g_n par $g_0 = \eta$ et, pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$g_{n+1} = \eta + T\left(\frac{1}{g_n}\right).$$

a. Vérifier que g_n appartient à $\mathcal{F}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Montrer que pour tout entier $p \geqslant 0$ on a $g_{2p} \leqslant g_{2p+1}$ et que les sous-suites $(g_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(g_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ sont l'une croissante et l'autre décroissante.

c. En déduire que la suite $(g_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[\,0,1\,]$ vers une fonction réelle qu'on notera g et que la suite $(g_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[\,0,1\,]$ vers une fonction réelle qu'on notera G.

4.a. Trouver un réel majorant pour tout n la valeur absolue de la dérivée g'_n.

b. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une partition de $[\,0,1\,]$ en intervalles de longueurs égales tels que, pour tout n, l'image par g_n de chacun de ces intervalles soit un intervalle de longueur majorée par ε.

c. Etablir que les convergences respectives des suites $(g_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(g_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ sont toutes deux uniformes sur $[\,0,1\,]$.

d. En déduire les égalités

$$g = \eta + T\left(\frac{1}{G}\right) \qquad \text{et} \qquad G = \eta + T\left(\frac{1}{g}\right).$$

Les fonctions g et G appartiennent-elles à $\mathcal{F}$?

5. On définit sur $[\,0,1\,]$ la fonction u par l'égalité

$$u(x) = x\,[\,G(x) - g(x)\,]\,.$$

a. Donner les valeurs de $u(0)$, $u(1)$ et $u'(0)$.

b. Exprimer $u''(x)$ à l'aide de $u(x)$, $g(x)$ et $G(x)$.

c. Quelle est la fonction u ? Comment obtient-on la solution ψ de E cherchée au début de cette partie III ?

6. Dessiner schématiquement le graphe d'une solution maximale de E passant par le point $(0,1)$. Comment s'en déduisent les graphes des autres solutions maximales de E définies pour $x = 0$?

Note UPS: *La réponse à la question III-5°c) est inconnue ...*